Stahl János

Hányados célfüggvényű programozási feladatok dekompozíciójáról

1. Előzmények

Egy korábbi cikkünkben [3] egy dekompozíciós eljárást származtattunk a

$$
\begin{aligned}
&\sum_j A_j x_j = b \\
&B_j x_j = b_j \\
(1)\qquad &x_j \geq 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots) \\
&\max \frac{\sum_j c_j x_j + \gamma}{\sum_j d_j x_j + \delta}
\end{aligned}
$$

feladat megoldására. Az eljárás származtatása úgy történt, hogy az (1) feladat változóira alkalmaztuk azt a transzformációt, ami a Dantzig—Wolfe eljárás alapja, majd megoldottuk az így kapott hányados programozási feladatot. Ez a Charnes és Cooper által javasolt módon ([2]) történt, ami a hányados programozási feladatot egy vele ekvivalens lineáris programmal helyettesíti.

Ezt az eljárást azóta már többször is felfedezték. (Úgy látszik, a SZIGMA csak kevesekhez jut el.) Arról nincs tudomásunk, hogy valaki alkalmazta volna az eljárást, vagy akárcsak kísérleti célokra is elkészült volna egy megfelelő számítógépes program. Mi a hivatkozott cikkben ezért foglalkoztunk az eljárással, mert abban az időben a magyar vállalatok többségénél a jövedelemszabályozási rendszer olyan volt, hogy az (1) modell dekompozíciós megoldásának megfeleltethető volt, pl. egy több részegységből álló nagyvállalat decentralizált irányítási rendszere. (Természetesen egy ilyen dekompozíciós eljárás általában csak fenntartásokkal tekinthető egy decentralizált irányítási rendszer modelljének.) Időközben a vállalatok jövedelemszabályozásának mechanizmusa némileg megváltozott, de a hányados programozási modell az új mechanizmusban is fontos szerepet játszik, vagy játszhat. Ilyen vonatkozású részletekkel azonban itt nem foglalkozunk.

Valójában már [3] megírásakor felmerült az a lehetőség, hogy az ottani eljárás származtatása során végrehajtott két lépés sorrendjét fordítsuk meg: először hajtsuk végre a Charnes—Cooper transzformációt, és az így adódó feladatot oldjuk meg dekompozícióval.

A Charnes—Cooper transzformáció végrehajtása után (1) ekvivalens a

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
d_1 z_1 + d_2 z_2 + \ldots + \delta\zeta &= 1 \\
A_1 z_1 + A_2 z_2 + \qquad - b\zeta &= 0
\end{aligned}
$$

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
B_1 z_1 \qquad\qquad\qquad & - b_1\zeta = 0\\
B_2 z_2 \qquad\quad & - b_2\zeta = 0\\
z_1, z_2, \ldots & \geq 0\\
\max\,(c_1 z_1 + c_2 z_2 + \ldots & + \gamma\zeta)
\end{aligned}
$$

lineáris programmal.

A (2) feladat egy ún. kétszeresen összekapcsolt — a „közös" feltételeken túl a közös ζ változót is tartalmazó-feladat és az ilyeneket akkor még nem tudtuk elég jól kezelni. A 2. részben először azt írjuk le, hogy mi volt a bajunk ezzel a lehetőséggel, majd azt tárgyaljuk, hogy miképpen tudunk ettől megszabadulni.

2. További lehetőségek

A Benders dekompozíció [1] „kézenfekvő" alkalmazásához helyettesítsük (2)-t a vele ekvivalens

$$
\begin{aligned}
\sum_j \sigma_j + \delta\zeta &= 1\\
\sum_j s_j - b\zeta &= 0\\
d_j z_j &= \sigma_j\\
(3)\qquad A_j z_j &= s_j \qquad (j = 1, 2, \ldots)\\
B_j z_j &= b_j\zeta\\
z_j &\geq 0\\
\max\Big(\sum_j c_j z_j &+ \gamma\zeta\Big)
\end{aligned}
$$

feladattal. Ha most oly módon alkalmazzuk a Benders dekompozíciót, hogy a σ_j-ket, s_j-ket és ζ-t tekintjük az ún. központi feladat változóinak, akkor az eljárás minden lépése során a részfeladat(ok)

$$
\begin{aligned}
d_j z_j &= \tilde{\sigma}_j\\
A_j z_j &= \tilde{s}_j\\
(4)\qquad B_j z_j &= b_j\tilde{\zeta}\\
z_j &\geq 0\\
\max\, c_j z_j &
\end{aligned}
$$

alakú(ak), ahol $\tilde{\sigma}_j$, $\tilde{s}_j$ és $\tilde{\zeta}$ az aktuális központi feladat megoldásából adódik.

Az interpretációs lehetőségek szempontjából azok az eljárások az érdekesek ahol a részfeladatok olyan hányados programozási feladatok, melyekben a számlálók és a nevezők a $c_j x_j$-kkel illetve a $d_j x_j$-kkel — esetleg lépésenként változó — kapcsolatba hozható kifejezések [3]. A (4) részfeladatok a Charnes—Cooper transzformáció megfordításával nem hozhatók ilyen alakra.

Ha ugyanis $x_j \in \{x_j \mid B_j x_j = b_j, x_j \geq 0\}$ esetén teljesül $d_j x_j > 0$, $\tilde{\zeta} \neq 0$ és $\tilde{\tilde{s}}_j = \tilde{s}_j/\tilde{\zeta}$, akkor az

$$A_j x_j = \tilde{\tilde{s}}_j$$

$$B_j x_j = b_j$$

$$x_j \geq 0$$

$$\max \frac{c_j x_j}{d_j x_j/\tilde{\sigma}_j}$$

feladattal a Charnes–Cooper transzformáció szerint a

$$d_j z_j = \tilde{\sigma}_j$$

$$A_j z_j - \tilde{\tilde{s}}_j \zeta_j = 0$$

$$B_j z_j - b_j \zeta_j = 0$$

$$z_j \geq 0$$

$$\max c_j z_j$$

lineáris program ekvivalens. Ettől (4) abban tér el, hogy ott ζ_j értéke $\tilde{\zeta}$-nak van rögzítve. Ily módon a most felírt feladat megoldásából a (4) részfeladat egy duál lehetséges megoldása ugyan megkapható, de (4) optimumértékére legfeljebb csak egy felső korlát nyerhető és mindez a Benders dekompozíció vázolt alkalmazásához kevés. (A Benders dekompozíciós elvből adódó eljárás részletes leírására mondanivalónk szempontjából nincs szükség.)

Az elmondottak viszont azt is jelzik, hogy miképpen kelt (2)-t annak céljából átalakítani, hogy kétszeresen összekapcsolt feladatokra javasolt dekompozíciót [4] alkalmazva olyan eljáráshoz jussunk, ahol a részfeladatok hányados programozási feladatok. (A (2) feladat „kézenfekvő" dekompozíciójával ugyanis pontosan ugyanaz a „probléma", mint a Benders dekompozíciónál. Egyébként a kétszeresen összekapcsolt feladatokra vonatkozó dekompozícióból a jelen esetre adódó eljárás részletes leírásától is eltekintünk.)

Újabb változók és az őket definiáló egyenletek bevezetése után (2) ekvivalens a

$$\sum_j \sigma_j + \delta\zeta = 1$$

$$\sum_j A_j z_j - b\,\zeta = 0$$

$$\zeta_j = \zeta$$

$$(5) \qquad d_j z_j = \sigma_j \qquad (j = 1, 2, \ldots)$$

$$B_j z_j - b_j \zeta_j = 0$$

$$z_j \geq 0$$

$$\max \left(\sum_j c_j z_j + \gamma\zeta \right)$$

lineáris programmal. Ha itt közös feltételeknek az első három feltételt illetve feltételcsoportot, közös változóknak a σ_j-ket és ζ-t tekintjük, akkor [4] szerint olyan dekompozíciós eljáráshoz jutunk, ahol a részfeladatok

$$\begin{gathered} d_j z_j = \tilde{\sigma}_j \\ B_j z_j - b_j \zeta_j = 0 \\ z_j \geq 0 \\ \max \{(c_j - \tilde{p} A_j) z_j - \tilde{\varrho}_j\} \end{gathered} \tag{6}$$

alakúak. Itt $\tilde{p}$ és $\tilde{\varrho}_j$ a közös feltételeknek, $\tilde{\sigma}_j$ pedig a közös változóknak megfelelő központi feladatból adódik. (6) pedig nyilván ekvivalens a

$$\begin{gathered} B_j x_j = b_j \\ x_j \geq 0 \\ \max \frac{(c_j - \tilde{p} A_j) x_j - \tilde{\varrho}_j}{d_j x_j / \tilde{\sigma}_j} \end{gathered}$$

hányados programozási feladattal.

(Beérkezett: 1981. szeptember 25-én)

IRODALOM

1. Benders, J. F.: Partitioning procedures for solving mixed variable programming problems. *Numerische Mathematik*, 18/2, 1962.
2. Charnes, A.—W. W. Cooper: Programming with linear fractional functionals. *Naval Research Logistics Quarterly*, 9/2, 1962.
3. Kovács Á.—Stahl, J.: Dekompozíciós eljárás a vállalati érdekeltség mutatójának maximalizálása esetén. *Szigma*, VI/2, 1973.
4. Stahl J.: A kétszeres összekapcsolt lineáris programozási feladatról. *Szigma* VII/1, 1974.

ON THE DECOMPOSITION OF FRACTIONAL PROGRAMMING PROBLEMS

The note discusses the possibilities of solving the fractional programming problem by decomposition. The main point is to develop a procedure where the subproblems are also fractional programming problems.

О ДЕКОМПЕНСАЦИИ ЗАДАЧ ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ДРОБНЫМИ ЦЕЛЕВЫМИ ФУНКЦИЯМИ

В данной статье речь идет о такой декомпенсационной задаче с дробными целевыми функциями, в которой частные проблемы также представляют собой задачи программирования дробей.