

PAULO R.C. VILLELA - CLAUDIO T. BORNSTEIN

A nulla-egy-es hátizsák feladat optimális célfüggvényértéke egy felső korlátjának élesítése

1. Bevezetés

Tekintsük a következő P^0 nulla-egy-es hátizsák feladatot ($KP01$)

$$z^* = \max z = \sum_{i=1}^n p_i x_i \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i x_i \leq M \quad (2)$$

$$x_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3)$$

ahol az i tárgyhoz tartozó haszon, ill. súly p_i , ill. w_i . A célunk, hogy a tárgyaknak egy olyan részhalmazát válasszuk ki (a megfelelő $x_i = 1$ értékadások segítségével), hogy ezáltal maximalizáljuk a teljes z hasznot, miközben az M súlykorlátot nem sértjük meg.

A probléma látszólagos egyszerűsége ellenére mindmáig nem tudjuk, hogy meg lehet-e oldani polinomiális algoritmussal, és tekintve, hogy a feladat NP-teljes, ezért nem is valószínű, hogy ilyen eljárás létezzék.

A $KP01$ feladat egzakt megoldó algoritmusai között igen elterjedtek és hatékonyak a korlátozás és szétválasztás különböző változatai. Így többek között az [1], [3], [4], [5], [7], [8], [9] dolgozatok közölnek ilyen módszert.

Most némileg leegyszerűsítve összefoglaljuk a korlátozás és szétválasztás elvén alapuló algoritmusokat. A P^0 feladatból kiindulva a szétválasztási eljárás a részfeladatok egy P^1, P^2, \dots halmazát állítja elő, például az x_i változó valamely értéken való rögzítésével. Az algoritmus a P^0 optimális megoldásához egy LB_z alsó korlátot is meghatároz ($LB_z \leq z^*$) amely nem más, mint P^0 egy megengedett megoldásának célfüggvényértéke. Továbbá minden P^i részfeladat optimális célfüggvényértékéhez meghatároz egy UB^i felső korlátot. Természetesen ha $UB^i \leq LB_z$, akkor a P^i feladatot elhagyhatjuk.

Ebből a tényből adódik, hogy az algoritmus hatékonysága igen erősen függ a korlát jóságától. Azonban pontosabb korlát a szükséges többszámítások miatt nagyobb gépidőt igényel, ami annál inkább kritikussá válik, minél gyakrabban számítjuk ki a korlátot.

A jelen dolgozatban egy új felső korlátot adunk meg a $KP01$ feladathoz, mely valóban több számítást igényel. Az eredmény fő előnye azonban az, hogy ezt a megjavított korlátot csak egyszer, UB^0 meghatározásánál kell kiszámítani. A további P^i feladatok esetében UB^i már valamely gyorsabb módszerrel is előállítható. Így a kis számítási többletet a korlát pontosságában mutatkozó javulás kompenzálja.

A megjavított UB^0 érték fő előnye a következőképpen érthető meg. Tegyük fel, hogy az eljárás során találtunk egy olyan megengedett megoldást, hogy már $LB_z = UB^0$ is teljesül. Ekkor bizonyosak lehetünk abban, hogy a talált pont optimális. Habár az $LB_z = UB^0$ feltétel ellenőrzése további gépidőt igényel, ezzel kapcsolatban az [5] dolgozat jó eredményekről számol be.

2. Néhány felső korlát rövid áttekintése

Csak azokat a felső korlátokat ismertetjük, amelyek szorosan összefüggnek az általunk megjavított korláttal. Teljes körkép található a témáról [6]-ban.

Tegyük fel, hogy P^0 -ban úgy rendeztük a tárgyakat, hogy $p_i/w_i \geq p_{i+1}/w_{i+1}$, $i = 1, \dots, n-1$. Továbbá az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy p_i és w_i pozitív egész, $w_i \leq M$, $i = 1, \dots, n$, és

$$\sum_{i=1}^n w_i > M.$$

A felső korlátok későbbi definícióinak egyszerűsítése érdekében bevezetünk egy új, mesterséges tárgyat a $p_{n+1} = 0$ és $w_{n+1} = M$ adatokkal.

A P^0 feladathoz tartozó egyik legelső felső korlátot 1957-ben DANTZIG közölte [2]. Ez

$$UB_D^0 = \sum_{i=1}^k p_i + \left[\left(M - \sum_{i=1}^k w_i \right) p_{k+1} / w_{k+1} \right], \quad (4)$$

ahol k azt a legnagyobb egészet jelöli, amelyre még

$$\sum_{i=1}^k w_i \leq M$$

igaz, és $[\alpha]$ az a legnagyobb egész szám, amelyik nem nagyobb, mint α .

1977-ben MARTELLO és TOTH [5] megtalálták a Dantzig-féle felső korlát egy javítását. A javítás alapgondolata az, hogy P^0 optimális megoldásában vagy

$x_{k+1} = 0$ vagy $x_{k+1} = 1$. A két esetet külön-külön vizsgálva egy B_1 és B_2 korláthoz jutunk, ahol

$$B_1 = \sum_{i=1}^k p_i + \left[\left(M - \sum_{i=1}^k w_i \right) p_{k+2} / w_{k+2} \right], \quad (5)$$

$$B_2 = \left[\sum_{i=1}^{k+1} p_i - \left(\sum_{i=1}^{k+1} w_i - M \right) p_k / w_k \right]. \quad (6)$$

Így Martello és Toth felső korlátja

$$UB_{MT}^0 = \max\{B_1, B_2\} \quad (7)$$

lesz. Martello és Toth megmutatták, hogy $UB_{MT}^0 \leq UB_D^0$, azaz a korlátjuk jobb.

UB_{MT}^0 egy további javítását HUDSON [6] adta meg 1977-ben. Észrevette, hogy B_2 -ben a korrekciónál úgy vettük, mintha az egész

$$\sum_{i=1}^{k+1} w_i - M$$

túlsúly a k tárgyból származott volna. Mivel k -ról azt tudjuk csak, hogy a hozzá tartozó érték a legkisebb a $p_i/w_i, i = 1, \dots, k$ számok közül, ezért a túlsúly w_k -nál nagyobb lehet. Így elképzelhető, hogy a korrekciót alá- és ezért a felső korlátot túlbecsüljük.

Az $x_{k+1} = 1$ esetben Hudson az $1, \dots, k$ tárgyakra és az $M - w_{k+1}$ megmaradó súlykorlátra Dantzig ötletét alkalmazza. Jelölje \hat{k} azt a legnagyobb egészet, amire még

$$\sum_{i=1}^{\hat{k}} w_i \leq M - w_{k+1}$$

teljesül. Ekkor azt nyerjük, hogy

$$B_3 = \sum_{i=1}^{\hat{k}} p_i + p_{k+1} + \left[\left(M - w_{k+1} - \sum_{i=1}^{\hat{k}} w_i \right) p_{k+1} / w_{k+1} \right]. \quad (8)$$

[6]-ban megmutatják, hogy $B_3 \leq B_2$ mindig teljesül. Így Hudson felső korlátja

$$UB_H^0 = \max\{B_1, B_3\} \quad (9)$$

amire

$$UB_H^0 \leq UB_{MT}^0.$$

3. A felső korlát egy élesítése

A mi javításunk is egy hasonló gondolaton alapszik, mint ahogy Hudson B_3 -at meghatározta. Észrevehetjük, hogy B_1 kiszámításánál a megmaradó

$$M - \sum_{i=1}^k w_i$$

súlyt, ami az $x_{k+1} = 0$ értékadás miatt keletkezett, mind a $k+2$ tárgyhoz rendeltük, holott előfordulhat, hogy

$$M - \sum_{i=1}^k w_i > w_{k+2}.$$

Ekkor, mivel a $k+2$ tárgyhoz tartozik a legnagyobb p_i/w_i érték a $k+2, \dots, n$ tárgyak között, felső becslésként szükségtelenül nagy értéket adunk meg.

Amit a továbbiakban csinálni akarunk, az nem más, mint a Dantzig-féle korlát meghatározása az $1, 2, \dots, k, k+2, \dots, n$ tárgyakra és az M összúlyra. A következő tétel írja le a korlát élesítését.

Tétel: Legyen \bar{k} ($1 \leq \bar{k} \leq n+1$) az a legkisebb egész, amelyre

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k+1}}^{\bar{k}} w_i \geq M.$$

Továbbá legyen

$$B_4 = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k+1}}^{\bar{k}} p_i + \left[\left(M - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k+1}}^{k-1} w_i \right) p_{\bar{k}} / w_{\bar{k}} \right] \quad (10)$$

és

$$UB_{VB}^0 = \max\{B_4, B_3\}. \quad (11)$$

Ekkor

$$UB_{VB}^0 \leq UB_H^0.$$

Bizonyítás: Elegendő csak a $B_4 \leq B_1$ egyenlőtlenséget megmutatni az $UB_{VB}^0 \leq UB_H^0$ reláció bizonyításához. Természetesen $\bar{k} \geq k+2$.

Ha $\bar{k} = k+2$, akkor (5) és (10) összehasonlítása mutatja, hogy $B_4 = B_1$.

Tekintsük most a $\bar{k} \geq k+3$ esetet. Ekkor

$$B_4 = \sum_{i=1}^k p_i + \left[\sum_{i=k+2}^{\bar{k}-1} p_i + \left(M - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k+1}}^{\bar{k}-1} w_i \right) p_{\bar{k}} / w_{\bar{k}} \right]. \quad (12)$$

Így (5) és (12) összevetéséből adódik, hogy $B_4 \leq B_1$ bizonyításához elegendő csak a $\lfloor \cdot \rfloor$ jelen belüli részeket tekinteni. Azonban

$$\begin{aligned} & \sum_{i=k+2}^{\bar{k}} p_i + (M - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k+1}}^{\bar{k}-1} w_i) p_{\bar{k}} / w_{\bar{k}} = \\ &= \sum_{i=k+2}^{\bar{k}} w_i p_i / w_i + (M - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k+1}}^{\bar{k}-1} w_i) p_{\bar{k}} / w_{\bar{k}} \leq \\ &\leq \sum_{i=k+2}^{\bar{k}} w_i p_{k+2} / w_{k+2} + (M - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k+1}}^{\bar{k}-1} w_i) p_{k+2} / w_{k+2} = \\ &= (M - \sum_{i=1}^k w_i) p_{k+2} / w_{k+2} \end{aligned}$$

ami a kívánt eredményt bizonyítja.

A következőkben egy példán illusztráljuk a különböző korlátokat.

Példa: Tekintsük az alábbi feladatot

$$\begin{aligned} \max z &= 15x_1 + 14x_2 + 14x_3 + 18x_4 + 9x_5 + 3x_6 \\ 12x_1 + 14x_2 + 15x_3 + 24x_4 + 12x_5 + 6x_6 &\leq 60 \\ x_i &\in \{0, 1\}, i = 1, \dots, 6. \end{aligned}$$

Ekkor

$$\begin{aligned} k &= 3, \hat{k} = 2, \bar{k} = 7 \\ B_1 &= 15 + 14 + 14 + \lfloor 57/4 \rfloor = 57 \\ B_2 &= \lfloor 15 + 14 + 14 + 18 - 14/3 \rfloor = 56 \\ B_3 &= 15 + 14 + 18 + \lfloor 28/3 \rfloor = 56 \\ B_4 &= 15 + 14 + 14 + 9 + 3 + \lfloor 0 \rfloor = 55. \end{aligned}$$

Így a felső korlátok a következők

$$\begin{aligned} UB_D^0 &= 15 + 14 + 14 + \lfloor 57/4 \rfloor = 57 \\ UB_{MT}^0 &= \max\{B_1 B_2\} = 57 \\ UB_H^0 &= \max\{B_1 B_3\} = 57 \\ UB_V^0 &= \max\{B_4 B_3\} = 56. \end{aligned}$$

