

## AZ OPTIMÁLIS BENZINKEVERÉS EGY MATEMATIKAI MODELLJE

TERLAKY TAMÁS - WÉBER GÁBOR

*ELTE TTK Operációkutatási Tanszék - Magyar Szénhidrogénipari  
Kutató-Fejlesztő Intézet*

Cikkünkben a Dunai Kőolajipari Vállalat (DKV) tartályparki benzinkeverését optimalizáló matematikai modellt közöljük. A benzinkeverési feladatban számos korlátozó tényezőt kellett figyelembe venni (tartályok száma, kapacitása, üzempacitások, igény, előkeverési kényszer). Néhány korlátozó tényezőtől (csőkapacitás) eltekintettünk, illetve a jelenlegi műszerezettség mellett követhetetlen folyamatokat (egy tartály egyidejű lefejtése és töltése különböző anyagokkal) leltitottuk.

A korlátozásokat figyelembe véve, egy lényegében kétfázisú lineáris keverési modellt konstruáltunk. A két fázist egy interface program köti össze, amely az első fázis eredményéből elkészíti a második fázis input adatait. Az optimális keverést mindkét fázisban egy összetett - költség és büntetés - célfüggvény biztosítja.

### 1. Bevezetés

A keverési feladat az operációkutatás klasszikus feladatai közé tartozik. Az általunk ismert első-egzaktt keverési modell CHAMES, COOPER, MELLON (1952)-től származik. Nagy gyakorlati hasznossága, sokoldalú alkalmazhatósága miatt a keverési modellek állandóan napirenden voltak és vannak. Így többek közt DANTZIG (1963) és HADLEY (1964) is több keverési modellt tárgyalt. Csak példaként említjük a kerozin keverési, betonkeverési, tápanyagkeverési feladatokat.

A matematikai statisztikában, az információelméletben is fontos helyet foglal el a különböző eloszlások eltéréseinek mérése, vizsgálata. Az eltérések legfontosabbjait CSISZÁR (1975) foglalta össze az úgynevezett  $f$ -eltérések családjába. Csiszár munkájára alapozva, KLAFSZKY-MAYER-TERLAKY a keverési feladat matematikai tulajdonságait a megoldási módszerek hatékonyságát összehasonlítva vizsgálta.

Mint már említettük (a teljesség igénye nélkül) számos keverési modellt konstruáltak az elmúlt évtizedekben. Cikkünk témája egy újabb keverési modell, melynek közlését azért tartjuk indokoltnak, mert egyidejűleg több keverést kell végrehajtani speciális műszaki adottságok között. Ennek a komplex keverési feladatnak egyetlen általunk ismert modell sem tesz eleget.

Végül, egy lényegében kétfázisú keverési modellt konstruáltunk, melyben a nem lineáris számításokat egy interface program végzi, az eltérések mérésére lineáris függvényt választottunk, illetve ahol szükséges volt, linearizáltuk az összefüggéseket.

Cikkünk felépítése a következő: A második fejezet a feladat műszaki- gazdasági korlátozásait, a probléma megfogalmazását tartalmazza. A harmadik fejezetben a feladat megoldásához, a készülő interaktív programrendszer üzemeltetéséhez szükséges adatbázist ismertetjük, míg végül a negyedik fejezetben a matematikai modellt ismertetjük.

## 2. Műszaki, technikai feltételek, a feladat megfogalmazása

A feladat lényege röviden az alábbiakban foglalható össze: Olyan modell és számítógépes program kidolgozása, mely akár naponta több alternatívában PC-n is hatékonyan megoldható, és

- a Dunai Kőolajipari Vállalat (DKV) termelési értékeit,
- a kiszállítási igényeket (ÁFOR, TVK, export),
- a műszaki adottságokat, korlátokat

figyelembe véve, optimális benzinkeverési recepteket szolgáltat. A kikevert benzinfajtáknak el kell érniük a szabványban előírt értékeket (minőségi alsó korlátok), és ezeket az értékeket a lehető legjobban kell közelíteni (felülről), ami a minimális „minőségi elajándékozást” biztosítja.

### *A feladat részletes megfogalmazása, műszaki korlátok*

Az üzemekből vezetékeken (jelenleg nyolc) érkeznek a különböző szénhidrogén párlatok (mintegy harminc féle) a tartályokhoz. Ezek egy része már a csövekben keveredik, és így kerülnek tárolásra, illetve keverednek további komponensekkel.

Ebben a fázisban az anyagok három különböző típusú tartályba kerülnek. Az első típusba azok a tartályok tartoznak (egyedi tartályok), melyekben az értékes párlatok külön-külön kerülnek tárolásra. Ilyenek pl. a krakkbenzin, alkilátum, stb.

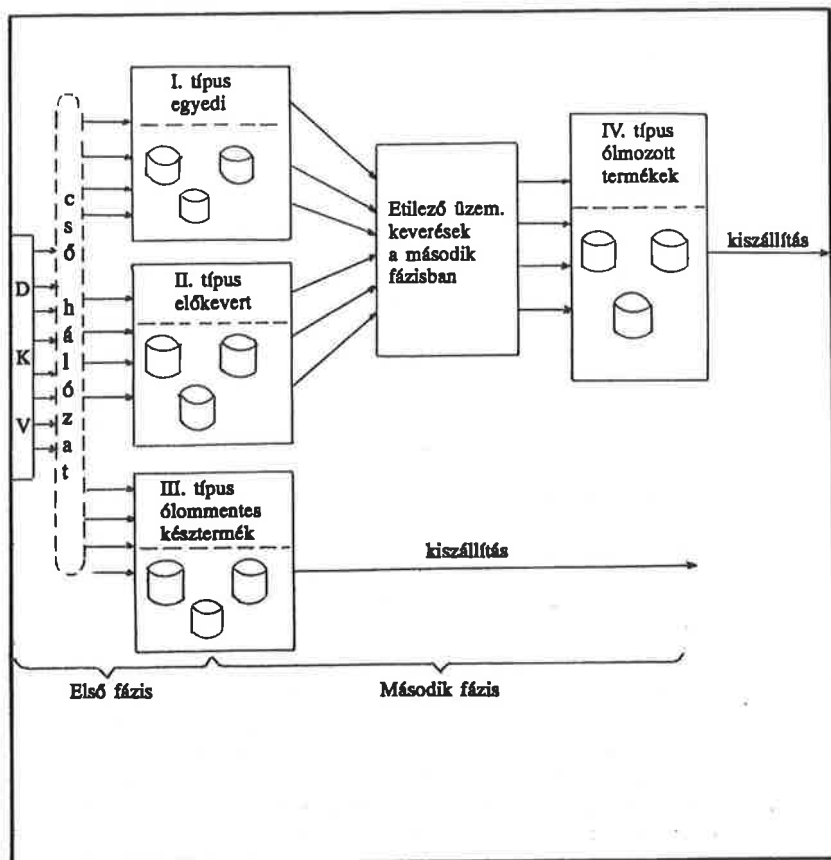
A második típusba azok a tartályok kerültek (előkeverő tartályok), melyekben a kevésbé értékes komponensek keverten tárolódnak. Itt természetesen további finomabb csoportosításra van szükség annak érdekében, hogy különböző minőségű keverőkomponenseket nyerjünk.

A harmadik típusba azok a tartályok kerültek, amelyekben közvetlenül, az üzemekből jövő párlatokból végterméket kevernek. Ezek a közvetlenül keverendő termékek az ólommentes benzinek és az ipari benzinek.

A második fázisban az előbb első és második típusba sorolt tartályokban előállt egyedi komponensekből, illetve előkevert elegyekből kell a késztermékeket kikeverni. Itt is, de az első fázis késztermékeinél is a minőségi paramétereket szabvány határozza meg. A második fázisban már csak ólmozott benzinek keletkeznek (soroljuk ezeket, illetve az itteni tartályokat a negyedik típusba).

Az anyagáramokat az egész rendszerben csővezeték-hálózaton keresztül számtalan szivattyú biztosítja, illetve tolózárok állításával irányíthatók. Mivel mindenhol többszörös túlbiztosítás van, ezért az itt jelentkező korlátozásoktól eltekinthetünk.

A keverési folyamat sematikus ábrája az alábbi:



1. ábra

Megjegyezzük, hogy az első fázisban még minden komponens, termék ólommentes, az ólmozás a második fázisban, az etilező üzemben történik, amit a modell szempontjából (a folyadékbrától eltérően) tartályként kezelhetünk (ólom-tetraetil tartály).

A figyelembe veendő korlátok:

- a) Az üzemek termelése. Adott értéke, minden termelt párlatot el kell helyezni valamelyik tartályba.
- b) Csőhálózati kapcsolatok. Mi, mivel van összekötve. Bizonyos tartályok közötti összeköttetés nem megengedett.
- c) Cső- és szivattyúkapacitások. Mint kiderült, ettől eltekinthetünk, mivel a többszörös túlbiztosítás miatt nem jelent korlátot.
- d) Tartályméret. Tartályoknak nyilván van felső korlátja, de bizonyos tartályoknál minimális tartalom is elő van írva, így ezeknél alsó korlátokkal is számolni kell, illetve a tényleges készletet ennyivel csökkenteni kell.
- e) Tartálykészletek. A számítás kezdetekor a tartályban lévő anyag mennyisége, és jellemző minőségi paraméterei.
- f) Minőségi követelmények. A különböző benzinfajtákra a szabvány 13 jellemző minőségi paraméterre tartalmaz előírást.
- g) Igény. Különböző felhasználóktól beérkező mennyiségi és minőségi igények.
- h) Etilező üzem kapacitása. Az etilező üzemben keverik a benzinkomponensekhez az ólomtetraetilt, amivel többek közt az oktánszámot javítják. Ennek kapacitását a bekeverhető ólomtetraetil mennyiségén keresztül korlátozzuk.
- i) Egyidejűleg legfeljebb hat komponens keveredhet. Ez a feltétel a második fázisban amiatt lép fel, mivel az etilező üzembe hat csőnek van bekötése. Ennek figyelembevétele egyes diszkrét programozási feladatot eredményezne, ami esetünkben a nagy méretek miatt megoldhatatlanná tenné a feladatot PC-n. Továbbá, lehetséges a kevert tartályokba közvetlenül áttárolni anyagot, valamint KLAFSZKY, MAYER, TERLAKY (5) dolgozat tapasztalatai szerint a keverésben a komponensek jelentős hányada ténylegesen nem vesz részt, így ettől a feltételtől a továbbiakban eltekintettünk.
- j) Ólommentes benzin csak az első fázisban keveredhet. Műszaki oldalról nem garantálható az ólommentesség a második fázisban. Ezt a korlátot már a folyamatábrában is figyelembe vettük.
- k) Ólommentes benzin nem ólmozható, nem keverhető tovább a második fázisban.

- 1) Két fázisban történhet a keverés, az első fázisban előkeverés és az ólommentes termékek keverése történik, a második fázisban az ólmozott termékek keverhetők.

### A feladat megfogalmazása

A fenti korlátozásokat figyelembe véve, a következő módon fogalmazható meg a feladat:

A cél olyan számítógépes modell, programrendszer kidolgozása, mely az adott termelési értékeket (a), készleteket (b) figyelembe véve szolgáltatja az optimális kétfázisú keverési programot, mely kielégíti az igényeket (f, g). Továbbá a keverési program eleget tesz a műszaki technikai feltételeknek (b, c, d, h), speciális követelményeknek (j, k) és a fenti feltételekből következő azon követelményeknek, hogy a keverést két fázisban optimalizálja.

### 3. Az adatbázis felépítése

Az adatbázis a feladat struktúrájának megfelelően, több részből tevődik össze. Tartalmazza az input, output adatokat, a minőségi paraméterek keverési egyenleteit, az anyagáramok optimális irányításához felhasznált (költség jellegű) célfüggvényértékeket, valamint a műszaki, hálózati korlátozásokat és kapacitásokat.

Az alábbi fő részekből és adatokból áll az adatbázis:

#### a) Tartályok

A feladatban előforduló tartályokat, műszaki paramétereit és a bennük lévő anyagok mennyiségi, minőségi jellemzőit, valamint a tartály felhasználási csoport szerinti besorolását tartalmazza:

- tartály azonosítója,
- kapacitás felső korlátja,
- kapacitás alsó korlátja,
- felhasználási cél (I., II., III., IV. típus),
- tartalmazott termék azonosítója,
- tartalmazott termék mennyisége,
- a termék 13 jellemző minőségi paramétere (figyelembe véve az egyes fázisoknak megfelelő változást).

*b) Termelési (input) adatok (alapanyagok)*

A finomítóból az adott időszak alatt a tartályparkba kerülő anyagok minőségi paramétereit tartalmazza:

- termék azonosítója (neve),
- termelt mennyiség,
- a termék 13 jellemző minőségi paramétere.

*c) Igényadatok (késztermékek)*

A kikeverendő termékekre ugyanazokat az adatokat tartalmazza, mint a b) a termelési adatokra.

- termék azonosítója (neve),
- igény mennyisége,
- a termék 13 jellemző minőségi paramétere.

*d) Kapcsolatok mátrixai (I. és II. fázishoz)*

Itt két mátrixot tárolunk a két fázisnak megfelelően, melyek leírják, hogy honnan hova áramolhatnak anyagok. A mátrix sorai a hova, oszlopai a honnan helyeknek felelnek meg (a szállítási feladathoz hasonlóan). Itt bizonyos átkötéseket műszaki okokból tiltani kellett. A szereplő cellákhoz célfüggvény-értékeket is rendeltünk, mely költségjellege miatt irányítja az anyagáramokat.

*e) Keverési egyenletek mátrixai (I. és II. fázishoz)*

Itt az egyes fázisokhoz tartozó azon egyenletek együttható mátrixait tároljuk, amelyek segítségével az egyes komponensek keveredésének eredményeként előálló keverékek minőségi paramétereit számolhatjuk ki. Ezek a keverési egyenletek a valódi keverési folyamat lineáris approximációi általában, ugyanis a lineárisan keveredő jellemzők (pl. aromás tartalom) mellett néhány minőségi jellemző (pl. ólomtartalom hatására az oktánszám) nem lineáris, hanem logaritmikus összefüggés szerint változik. Ennek lineáris közelítésével számolunk azért, hogy a modell megoldható legyen PC-n, a lineáris programozás keretein belül. Az általunk tekintett intervallumban a vizsgált lineáris approximáció jól közelíti a tényleges keveredési folyamatot. Ezt a közelítést tulajdonképpen javítja a kétfázisú keverés.

A fenti adatbázis adatait interaktív üzemmódban a felhasználó tartja karban, az időszakos futások során aktualizálja az input- (termelés), output- (igény) és készletadatokat. Továbbá, amikor szükséges, a keverési egyenletek együtthatóit és a kapcsolatok mátrixait is módosítja. Erre azonban csak ritkábban, új anyagok bevezetésekor vagy technológiai-műszaki átalakításkor van szükség.

## 4. A DKV benzinkeverésének matematikai modellje

A keverés, és így a keverési modell is kétfázisú. A két fázist egy interface program köti össze, amely biztosítja a két rész közti adatátvitelt, kiszámítja az előkevert tartályok minőségi jellemzőit. A második program futása után a modell záró lépése, hogy normálással kiszámítja a késztermékek pontos minőségi értékeit és tulajdonképpen egy egyszerű könyvelési művelettel a kikevert anyagokat a kiszállítási tartályokhoz rendeli.

## Az első fázis

Jelölje  $I_1, I_2, I_3$  az I., II., III. típusú tartályok indexhalmazait, és  $I_0$  az input anyagokhoz rendelt indexek halmazát.

## Változók:

- $x_{ij}$   $i \in I_0, j \in I_1 \cup I_2 \cup I_3$  az  $i$ . alapanyagból a  $j$ . tartályba kerülő mennyiség,  
 $z_j$   $j \in I_1 \cup I_2 \cup I_3$  a  $j$ . tartály zárókészlete,  
 $\pi_j^{(k)}$   $j \in I_3, k = 1, \dots, 13$  segédváltozók

## Adatok:

- $\alpha_i$   $i \in I_0$  az  $i$ . alapanyag termelt mennyisége,  
 $k_j$   $j \in I_1 \cup I_2 \cup I_3$  a  $j$ . tartály kezdő készlete,  
 $l_j, h_j$   $j \in I_1 \cup I_2 \cup I_3$  a  $j$ . tartály kapacitásának alsó és felső korlátja,  
 $m_j^{(k)}$   $j \in I_3, k = 1, \dots, 13$  a  $j$ . tartályhoz tartozó keverék  $k$ . minőségi paraméterhez tartozó keverési egyenletek együttható vektora,  
 $u_j^{(k)}$   $j \in I_3, k = 1, \dots, 13$  a  $j$ . tartályra előírt  $k$ . minőségi paraméter értéke,  
 $c_{ij}$   $i \in I_0, j \in I_1 \cup I_2 \cup I_3$  az  $i$ - $j$ . viszonylathoz hozzárendelt költséggyüttható,  
 $t_j^{(k)}$   $j \in I_3, k = 1, \dots, 13$  a  $\pi_j$  segédváltozó súlyozó (büntető) faktora.

## Feltételek:

$$\sum_{j \in I_1 \cup I_2 \cup I_3} x_{ij} = \alpha_i \quad i \in I_0 \quad (1)$$

$$\sum_{i \in I_0} x_{ij} + k_j - z_j = 0 \quad j \in I_1 \cup I_2 \cup I_3 \quad (2)$$

$$l_j \leq z_j \leq h_j \quad j \in I_1 \cup I_2 \cup I_3 \quad (3)$$

$$0 \leq x_{ij} \quad i \in I_0, j \in I_1 \cup I_2 \cup I_3 \quad (4)$$

$$m_j^{(k)} x_{.j} - \pi_j^{(k)} - u_j^{(k)} z_j = 0 \quad j \in I_3, k = 1, \dots, 13 \quad (5)$$

$$\pi_j^{(k)} \geq 0 \quad j \in I_3, k = 1, \dots, 13 \quad (6)$$

Cél:

$$cx + tp \rightarrow \min \quad (7)$$

ahol  $c, x, t, p$  a  $c_{ij}, x_{ij}, t_j^{(k)}, \pi_j^{(k)}$  együtthatókból alkotott vektorokat, míg  $x_{.j}$  az  $(x_{ij})_{i \in I_0}$  vektort jelöli.

Az (1) egyenletek a termelési mérlegegyenletek, a (2) egyenletek a tartályok mérlegegyenletei, melyekhez (3) egyenlőtlenségek biztosítják a tartályok kapacitáskorlátainak betartását, illetve  $I_3$  tartályaira  $l_j, h_j$  értékeinek a kiszállítási igény értékét megfeleltetve az igények kielégítését. A (4) nem negativitási feltételek tulajdonképpen csak az anyagáramlás irányát garantálják. A keverés szempontjából a legfontosabbak az (5) keverési egyenletek, melyek (6) feltételekkel együtt garantálják, hogy a keverés számított  $m_j^{(k)} x_{.j}$   $k$ -ik minőségi paramétere elérje az előírt minimális szintet.

Ezen a ponton rá kell mutatni, hogy a LEMKE (1965) dolgozatban közölt eltérések közül teljesen egyiket sem lehetett itt adaptálni, mivel a Kullback-Leibler és a Hellinger eltérés nem lineáris, a Pearson eltérés kvadratikus feladatra vezet, melyek PC-n az általunk vizsgált méretben megoldhatatlanok. Esetünkben ugyanis mintegy 30 alapanyag, 15 tartály és körülbelül  $5 \times 13$  minőségi feltétel szerepel, ami körülbelül egy  $100 \times 400$  méretű feladatot eredményez. Így a lineáris programozásra vezető Variáció és Szmirnov eltérés jöhetett csak szóba. Itt azonban nem egy cél közelítése, hanem felülről való közelítése a cél, így a minőségi korlátok mellé a felfelé való eltérés súlyozott büntetését választottuk, ami az eltérés súlyozott Variációs távolságával ekvivalens, miközben (5) és (6) feltételek garantálják a minőségi feltételek teljesülését.

A célfüggvényben szereplő  $c$  értékek az anyagáramlás irányának optimalizálását segítik elő, így a termékek a lehetőségek keretein belül a legértékesebb helyre kerülnek. A  $tp$  szorzat büntető függvény szerepét tölti be a  $t_j^{(k)}$  súlyértékekkel különbözően büntetve az egyes minőségi eltéréseket.



## Interface

Mint az már bizonyára feltűnt, a II. típusú előkeverési tartályokhoz nem rendeltünk minőségi egyenleteket (az I. típusú tartályokhoz, mivel itt egyedi termékeket tárolunk, nem is szükségesek). Ennek oka, hogy ezekre nincsenek minőségi előírások, a keverék minőségét azonban a második fázisban már ismernünk kell. Így az interface program – a két fázis közötti közvetlen adatátvitelen túl – számítja a tartályokban (keletkezett) lévő anyagok minőségi paramétereit az  $m_j^{(k)} x_j/z_j$  képlet alapján. Így egyszerűen skalár szorzatok és normálás segítségével megkapjuk a kívánt minőségeket. Ezt akkor sem lenne célszerű a modellbe bevenni, ha tehetnénk, mivel csak a méretet növeli, de az optimalást nem befolyásolja. Ezen túl azért sem vehetjük ezt a számítást a modellbe, mivel a normálás miatt nem lineáris összefüggésről van szó, tehát még ha a méretkorlátok megengednék, akkor sem lenne alkalmazható a kétlépcsős LP modellek szokásos technikája.

## Második fázis

A feladat mind szerkezetében, mind megoldási módjában analóg az első fázis feladatához. Jelölje  $I_4$  a IV. típusú tartályok indexhalmazát. Legyen  $I_1 = I_1 \cup \{(O)\}$ , ahol  $O$  jelöli az ételező üzemhez hozzárendelt indexeket.

## Változók:

- $y_{ij}$   $i \in I_1 \cup I_2, j \in I_4$  az  $i$ . előkevert tartályból a  $j$ . késztermék tartályba kerülő mennyiség,  
 $x_j$   $j \in I_4$  a  $j$ . tartály zárókészlete,  
 $\varrho_j^{(k)}$   $j \in I_4, k = 1, \dots, 13$  segédváltozó

## Adatok:

- $z_i$   $i \in I_1 \cup I_2$  az első fázisból számított zárókészlet, ami most induló készlet,  
 $k_j$   $j \in I_4$  a  $j$ . késztermék tartály kezdő készlete,  
 $l_j, h_j$   $j \in I_4$  a  $j$ . tartály kapacitásának alsó és felső korlátja, ill. az igény mennyisége  
 $m_j^{(k)}$   $j \in I_4, k = 1, \dots, 13$  mint az első fázisban,  
 $u_j^{(k)}$   $j \in I_4, k = 1, \dots, 13$  mint az első fázisban,  
 $d_{ij}$   $i \in I_1 \cup I_2, j \in I_4$  az  $i$ - $j$ . viszonylathoz hozzárendelt költséggyűttható,  
 $s_j^{(k)}$   $j \in I_4, k = 1, \dots, 13$  a  $\varrho_j^{(k)}$  segédváltozó súlyozó (büntető) faktora.

Feltételek:

$$\sum_{j \in I_4} y_{ij} \leq z_i \quad i \in I_1 \cup I_2 \quad (1')$$

$$\sum_{i \in I_1 \cup I_2} y_{ij} + k_j - \chi_j = 0 \quad j \in I_4 \quad (2')$$

$$l_j \leq \chi_j \leq h_j \quad j \in I_4 \quad (3')$$

$$0 \leq y_{ij} \quad i \in I_1 \cup I_2, j \in I_4 \quad (4')$$

$$m_j^{(k)} y_{.j} - \rho_j^{(k)} - u_j^{(k)} \chi_j = 0 \quad j \in I_4, k = 1, \dots, 13 \quad (5')$$

$$\rho_j^{(k)} \geq 0 \quad j \in I_4 \quad (6')$$

Cél:

$$dy + sr \rightarrow \min \quad (7')$$

ahol  $d = (d_{ij})$ ,  $y = (y_{ij})$ ,  $s = (s_j^{(k)})$ ,  $r = (\rho_j^{(k)})$

Nyilvánvaló most már, hogy az (1')–(7') feladat struktúrája lényegében azonos (1)–(7) feladatával, ezért a feltételek jelentését, az azokhoz fűzött magyarázatot nem ismételjük meg.

Megjegyezzük azonban, hogy (1') feltételek általában egyenlőtlenségek (1) egyenlőségekkel szemben, ugyanis az első fázisban a termelt mennyiséget el kell helyezni, itt azonban nem kötelező tovább keverni a tárolt mennyiséget. Ugyanis (3) egyenletek az első fázisban ( $I_3$ -tól eltekintve) kapacitáskorlátokat, míg  $I_3$  esetében és (3')-nál igényt jelentenek. Megjegyezzük továbbá, hogy (1–2) és (1'–2') feltételek lényegében egy felsőkorlátos szállítási feladat feltételrendszerét adják, az (5), illetve (5') feltételek miatt azonban ez a speciális struktúra nem használható ki feladatok megoldása során.

Végül, az egyes késztermékekből kikevert mennyiségeket, azok egy részét át kell tárolni a kiszállítási lehetőségeknek (igényeknek megfelelően, csővezetékes, közúti, vasúti, uszályszállítás) speciálisan felszerelt tartályokba. Ez az optimalizálástól független, komoly matematikai eszközöket nem igénylő könyvelési feladat az adatbázisban, melyet a program automatikusan elvégezhet, illetve a felhasználó igényei szerint irányítja a tárolást.

Összefoglalva: Az optimális benzinkeverést egy adatbázisra épülő, az adatbázis adataiból a megfelelő LP feladatokat automatikusan generáló és azokat megoldó programrendszer biztosítja. Az első és második fázis egy-egy LP feladat generálása és megoldása az aktualizált termelési és igényadatok függvényében. Az LP feladatok a természetes alsó-felső korlát megkötéseken túl szállítási feladat és minőségi

keverési típusú feltételeket tartalmaznak. Az optimális keverést mindkét fázisban egy összetett célfüggvény biztosítja, amely egy költség típusú és egy büntetés (az előírt minőségtől való eltérést bünteti) típusú összetevőből áll. A két fázist összekötő interface program számítja az előkevert anyagok tényleges minőségi paramétereit. Az optimalizáló lépések után egyszerű könyvelési manőver a harmadik fázisban a kiszállítási helyekre szétosztani a kikevert késztermékeket.

A modell IBM/PC-AT gépen interaktív üzemmódban használható, a felhasználó tetszőleges fázisban beavatkozhat, az egyes fázisok külön is futtathatók, és a megfelelő korlátozó paraméterek bevezetésével egyedi keverésre is felhasználható.

### IRODALOM

1. CHAMES A., COOPER W. W., MELLON, (1952): „Blending aveation gasolin – a study in programming interdependent activities in an integrated oil company”, *Econometrica*, 20., 35-159.
2. CSISZÁR I., (1975): „I-devergence geometry of probability distributions and minimization problems”, *Annales of Probability* 3, 146-156.
3. DANTZIG G. B., (1963): „Linear Programming and extensions” Princeton University Press, Princeton.
4. HADLEY G., (1962): „Linear Programming” Addison Wiley, Reading, Mass.
5. KLAFSZKY E., MAYER J., TERLAKY T.: „On mathematical programming models of mixing”, *EJOR* (to appear).
6. LEMKE C. E., (1965): „Bimatrix equilibrium points and mathematical programming”, *Management Science*, 11., 681-689.
7. RÉNYI A., (1962): „Wahrscheinlichkeitsrechnung mit einem Anlang über Informationstheorie”, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.

### ABSTRACT

A mathematical programming model for optimizing gasoline blending of Danubian Oil Work is presented in this paper. Several constraints not included in the classical blending problem are considered here. These include the number and capacity of tanks, production of the workshops, demand and preblending. In this model, we do not consider pipeline capacity constraints, since these constraints are always slack. It is assumed that a tank is not filled and not emptied simultaneously. Accordingly, a two phase blending model is constructed. The two phase is connected by an interface program which generates the input data for the second phase by computing quantitative and qualitative parameters of pre-mixed components. The optimal blending of gasolines is obtained by linear programming models with a composite cost and penalty objective.

