AUTOREGRESSZÍV FOLYAMATOK ELŐREJELZÉSE BAYES-MÓDSZERREL

VARGA JÓZSEF
JPTE Közgazdaságtudományi Kar, Pécs

Az idősorok elemzésére és előrejelzésére szolgáló Box-Jenkins módszer számos előnyös tulajdonsága következtében általánosan elfogadott, és az egyes előrejelzési technikák összehasonlítására leggyakrabban alkalmazott eljárás. Hátránya azonban, hogy a paraméter becslések bizonytalanságát nem veszi figyelembe. Az itt bemutatásra kerülő, Bayes-módszeren alapuló eljárás alkalmas a paraméterbecslések bizonytalanságának modellezésére mind a becslési, mind pedig az előrejelzési szakaszban. Egy ARIMA modell Bayes-módszerrel történő paraméter-becslése általában nem nehéz feladat, az előrejelzések előállítása azonban számos nehézséggel jár, mivel zárt formulák híján közelítéseket kell alkalmaznunk. A paraméterhalmaz az együttes a posteriori eloszlásból kiválasztott véletlen minta, amelyet azután az idősor egy jövőbeli lefutásának szimulálására használunk fel.

1. Bevezetés

A Bayes-féle megközelítés alapvető eleme a Bayes-tétel, amelyet az irodalomban az inverz valószínűség tételének is neveznek. Ennek a tételnek a folytonos valószínűségi változókra vonatkozó alakját fogjuk a következőkben felhasználni. Jelölje $p(Y, \Phi)$ az Y véletlen megfigyelés vektor és az ugyancsak véletlenszerűnek feltételezett Φ paramétervektor együttes valószínűség sűrűségfüggvényét. A paramétervektor elemei egy modell együtthatói, a zavar tényezők varianciái és kovarianciái stb. lehetnek. A valószínűség sűrűségfüggvény a szokásos műveletek alkalmazásával így írható:

$$p(Y, \Phi) = p(Y|\Phi)\, p(\Phi) = p(\Phi|Y)\, p(Y) \tag{1}$$

ahonnan

$$p(\Phi|Y) = \frac{p(\Phi)\, p(Y|\Phi)}{p(Y)} \qquad p(Y) \neq 0 \tag{2}$$

Az utóbbi kifejezésből pedig a következő adódik:

$p(\Phi|Y) \propto p(\Phi)\, p(Y|\Phi) \propto$ a priori valószínűség sűrűségfüggvény$\times$likelihood függvény, ahol $\propto$ az arányosság jele, $p(\Phi|Y)$ a Φ paramétervektor a posteriori valószínűség sűrűségfüggvénye adott Y minta információ mellett, $p(\Phi)$ a Φ paramétervektor a priori valószínűség sűrűségfüggvénye, és $p(Y|\Phi)$ a Φ függvényének tekintett jól ismert likelihood függvény. Láthatjuk, hogy a $p(\Phi|Y)$ együttes a posteriori sűrűségfüggvény magába foglalja az összes a priori és mintabeli információt.

Az „inverz valószínűségi" problémák úgy jellemezhetők, hogy adatok állnak rendelkezésünkre, és az adatokban rejlő információ alapján próbálunk meg arra következtetni, hogy milyen véletlen folyamat generálta ezeket az adatokat. Ugyanakkor a "direkt valószínűségi" problémák esetében ismerjük a véletlen folyamatot, beleértve a folyamat paramétereinek értékét is, és ennek alapján valószínűségi állításokat fogalmazunk meg az ismert folyamat kimeneteleivel vagy az általa előállított adatokkal kapcsolatban. Ebben a felfogásban a statisztika becslési problémái „inverz válószínüségi" problémáknak, míg számos, szerencsejátékokhoz fűződő probléma "direkt valószínűségi" problémának tekinthető.

Ha a priori információnk egy modell paramétereire vonatkozik, és ez az információ bizonytalan, az adatok elemzéséhez "diffúz" a priori valószínűség sűrűségfüggvényt alkalmazunk. A különböző típusú a priori valószínűség sűrűségfüggvényekre vonatkozó elveket és megfontolásokat itt nem tárgyaljuk (ld. ZELLNER (1971)).

Sok esetben feladatunk az, hogy a rendelkezésünkre álló Y minta információ alapján következtessünk még meg nem figyelt értékekre. A Bayes-féle megközelítésben a még meg nem figyelt értékek valószínűség sűrűségfüggvénye, amely prediktív valószínűség sűrűségfüggvényként ismert, meghatározható a minta információ felhasználásával. Jelölje $\tilde{Y}$ a még meg nem figyelt értékek vektorát. Az $\tilde{Y}$ és a Φ paramétervektor együttes sűrűségfüggvénye adott Y minta információ mellett

$$p(\tilde{Y},\Phi|Y) = p(\tilde{Y}|\Phi,Y)\,p(\Phi|Y) \tag{3}$$

A $p(\tilde{Y}|Y)$ prediktív valószínűség sűrűségfüggvény előállítása céljából csupán az előző egyenlet jobb oldalát kell integrálnunk Φ szerint, azaz

$$p(\tilde{Y}|Y) = \int_{R_\Phi} p(\tilde{Y},\Phi|Y)\,d\Phi = \int_{R_\Phi} p(\tilde{Y}|\Phi,Y)\,p(\Phi|Y)\,d\Phi \tag{4}$$

2. Idősorok előrejelzése Bayes-módszerrel

Az autoregresszív-integrált mozgóátlag (ARIMA) modell osztály az egyváltozós idősorok modellezésére és előrejelzésére megfelelő, flexibilis parametrikus formákat szolgáltat. A Bayes-féle megközelítés szempontjából azonban a Box-Jenkins módszer nélkülöz egy fontos jellemzőt, a paraméterbecslés bizonytalansága modellezési lehetőségét. Az itt bemutatandó eljárások lehetővé teszik ennek a bizonytalanságnak a modellezését mind a becslési, mind pedig az előrejelzési szakaszban. Bár az ARIMA modellek paramétereinek Bayes-módszerrel történő becslése viszonylag könnyű, az előrejelzések előállítása azonban nehézségekbe ütközik. A több periódusú előrejelzések esetében a prediktív sűrűségfüggvény nem írható kényelmesen kezelhető, zárt alakba, ezért közelítő módszerek szükségesek. Még csak kevés működőképes, Bayes-technikán alapuló alkalmazás ismert az előrejelzés területén, bár az ARMA modellek paraméterei becslésére szolgáló Bayes-típusú eljárásokról már az 1960-as években jelentek meg publikációk. Ennek oka rendkívül egyszerű, a becslésből az előrejelzésbe történő átmenet számos technikai nehézséget jelent. MONAHAN (1983) ,,teljesen Bayes-típusú" megközelítést alkalmaz, az elemzést azonban a kettőnél több paramétert nem tartalmazó modellekre korlátozta, ami a fent említett nehézségeket jelzi. BLOOMFIELD (1972) és BAILLIE (1979) az ARIMA modell paraméter becslésekor fellépő bizonytalanság kiegyenlítését vizsgálták. PENTIKAINEN és RANTALA (1979) szimulációs módszert alkalmaztak annak az időpontnak a becslésére, amikor az idősor elér egy korlátot. Ebben a dolgozatban az előrejelzéssel kapcsolatos, fent említett problémákat Bayes-féle nézőpontból közelítjük meg. A paraméterértékek bizonytalanságát automatikusan beépítjük a szimulációs eljárásba.

3. Autoregresszív modell paramétereinek becslése

Tekintsük a következő p-edrendű autoregresszív folyamatot:

$$y_t = \Phi_0 + \Phi_1 y_{t-1} + \cdots + \Phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t \qquad (t = 1, 2, \ldots, T) \tag{5}$$

ZELLNER (1971) megmutatta, hogy a

$$\Pi(\Phi_0, \ldots, \Phi_p, \tau) \propto 1/\tau \tag{6}$$

a priori eloszlás esetén az $Y = (y_{1-p}, \ldots, y_0, y_1, \ldots, y_T)$ megfigyelt értékek mellett a $\Phi = (\Phi_0, \ldots, \Phi_p)$ eloszlása a megfigyelt értékek és τ mint feltétel mellett normális eloszlás, a τ hiba a posteriori eloszlása pedig gamma eloszlás. Pontosabban:

$$(\Phi|\tau, Y) \sim N(\hat{\Phi}, [\tau D]^{-1}) \equiv \Pi(\Phi|\tau, Y) \tag{7}$$

illetve

$$(\tau|Y) \sim \Gamma(\tau/2,\ 2/S(\hat{\Phi})) = \Pi(\tau|Y) \tag{8}$$

$$D = \begin{pmatrix} T & y_{t-1} & y_{t-2} & \cdots & y_{t-p} \\ y_{t-1} & y_{t-1}^2 & y_{t-1}y_{t-2} & \cdots & y_{t-1}y_{t-p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{t-p} & y_{t-p}y_{t-1} & y_{t-p}y_{t-2} & \cdots & y_{t-p}^2 \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$\hat{\Phi} = \begin{pmatrix} \hat{\Phi}_0 \\ \hat{\Phi}_1 \\ \vdots \\ \hat{\Phi}_p \end{pmatrix} = D^{-1} \begin{pmatrix} \sum y_t \\ \sum y_{t-1}y_t \\ \vdots \\ \sum y_{t-p}y_t \end{pmatrix} \tag{10}$$

$$S = \sum_{t=1}^{T} (y_t - \hat{\Phi}_0 - \hat{\Phi}_1 y_{t-1} - \dots - \hat{\Phi}_p y_{t-p})^2 \tag{11}$$

$r = T-(p+1)$ és a D mátrix elemeiben az összegzés határai megegyeznek a (11)-beli határokkal.

A (6) eloszlás kis súlyt fektet az elemzést végző, a priori ismereteire, vagyis az a priori ismereteket elfedik az adatok. Informatív a priori eloszlást is alkalmazhatunk, amely nagyobb súlyt helyez a szakember szubjektív véleményére. A (6) típusú diffúz a priori eloszlás alkalmazásakor a paraméterek valószínűségeloszlást alkotnak, és a legvalószínűbb értékek megegyeznek a hagyományos legkisebb négyzetek módszerével adódó értékekkel. Ha ezt a módszert össze akarjuk hasonlítani a nem Bayes-féle közelítésekkel, akkor diffúz a priori eloszlást kell alkalmaznunk. Az (5) modell a paraméterekben lineáris. Ez a linearitás azonban eltűnik, ha mozgóátlag kifejezések kerülnek a modellbe. Ez azt jelenti, hogy nem lehetséges megfelelő zárt kifejezéseket nyerni a paraméterek a posteriori eloszlására. Előrejelzés esetén azonban már az egyszerű autoregresszív modellekben is eltűnik ez a linearitás. Például, amikor három lépéses előrejelzéseket állítunk elő a

$$y_{T+3} = \Phi_0 + \Phi_1 y_{T+2} + \Phi_2 y_{T+1} + \varepsilon_{T+3} \tag{12}$$

modell segítségével, a (12) jobb oldalának kifejezései a valószínűségi változók szorzatait tartalmazzák, ezáltal a prediktív eloszlás nem lesz standard alakú.

4. A prediktív eloszlás szimulálása

Az idősor előrejelzett értékeit a jövőbeli megfigyelések sűrűségfüggvénye segítségével állítjuk elő. Az n-lépéses előrejelzés előállításához szükséges a

$$p(y_{T+1}, \dots, y_{T+n} \,|\, Y) = \int f(y_{T+1}, \dots, y_{T+n}, \Phi_0, \dots, \Phi_p, \tau \,|\, Y)\, d\Phi\, d\tau =$$

$$\int f(y_{T+1}, \dots, y_{T+n}, \,|\, \Phi, \tau, Y)\, \Pi(\Phi|\tau, Y)\, d\Phi\, d\tau \tag{13}$$

prediktív eloszlás ismerete, ahol $-\infty < \Phi_i < +\infty \quad (i = 1, 2, \dots, p), \quad \tau > 0$.

A p-edrendű autoregresszív $AR(p)$ folyamat esetén az egylépéses prediktív eloszlás Student-féle t eloszlás $T-(p+1)$ szabadságfokkal. Ennek alapján az együttes eloszlás a feltételes sűrűségfüggvények szorzataként írható. Ez az eredmény kiterjeszthető az n-lépéses előrejelzésre az alábbiak szerint:

$$p(y_{T+1}, \dots, y_{T+n} \,|\, Y) = \prod_{k=1}^{n} p(y_{T+k} \,|\, y_{1-p}, \dots, y_{T+n-1}) \tag{14}$$

Tehát az együttes eloszlás n számú egyváltozós t eloszlás szorzataként fejezhető ki, azonban az előrejelzések előállítása nehéz, mert t eloszlások szorzata nem feltétlenül írható zárt alakba.

CHOW (1974) a több periódusú prediktív eloszlás várható érték vektorának és kovariancia mátrixának kiszámítására együttes előrejelzési momentumokat ad meg. Másodrendű modellel előállított

$$y_{T+3} = \Phi_0 + \Phi_1 y_{T+2} + \Phi_2 y_{T+1} + \epsilon_{T+3}$$

három lépéses előrejelzés CHOW eredménye alapján

$$y_{T+3} = \Phi_0(1 + \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_1^2) + \Phi_1(\Phi_1^2 + 2\Phi_2)y_T + \Phi_1^2(1 + \Phi_2)y_{T-1} + (\Phi_1^2 + \Phi_2)\epsilon_{T+1} + \Phi_1\epsilon_{T+2} + \epsilon_{T+3} \tag{15}$$

szerint adható meg. A (14) és (15) összefüggések a Bayes-közelítés idősorokra történő alkalmazásának nehézségét mutatják. Ezért általában valamilyen típusú közelítés alkalmazása szükséges az előrejelzési szakaszban. Az itt bemutatandó közelítés a prediktív eloszlás szimuláció útján történő meghatározása, mellőzve az eloszlás analitikus alakjának meghatározására irányuló próbálkozásokat.

A (13) összefüggés a prediktív sűrűségfüggvény olyan jellemzését adja, amelynek alapján Monte-Carlo módszer alkalmazásával lehetővé válik az integrál közelítő meghatározása.

A folyamat minden egyes jövőbeli $y_{T+1}, y_{T+2}, \ldots, y_{T+n}$ lefutásának előállítása három lépésben történik:

- 1. Véletlenszerűen kiválasztjuk (8)-ban leírt τ gamma eloszlású valószínűségi változó egy lehetséges értékét.
- 2. Az együttes a posteriori eloszlás alapján véletlenszerűen kiválasztunk egy $\Phi_0, \ldots, \Phi_p$ paraméterhalmazt.
- 3. Szimulálunk egy n periódus hosszúságú utat az 1. és 2. lépésekben kiválasztott paraméterek felhasználásával.

A szimulált utak elegendően nagy elemszámú halmaza a folyamat T időpont utáni lehetséges realizációinak egy mintája. Ezt a mintát azután sokféleképpen használhatjuk fel a folyamat jövőbeli lefolyásának jellemzésére.

Példaként egy iparcikkáruház szezonálisan kiegyenlített negyedéves forgalom adatait vizsgáltuk. Az 1970. első negyedévétől 1981. negyedik negyedévéig terjedő adatok alapján történt a modell identifikálása és a paraméterek becslése. (Lásd az 1. táblázatot.) A prediktív eloszlást a következő három évre állítottuk elő, vagyis 1982. első negyedévétől 1984. negyedik negyedévéig. 5000 lefutást állítottunk elő a fent bemutatott háromlépéses algoritmus alapján. Az eredményt a prediktív eloszlás néhány kiválasztott percentilisével jellemeztük. A mediánt, az 5, 25, 75 és 95 percentiliseket mutatja a 2. táblázat a különböző előrejelzési időpontokban.

1. táblázat: Egy iparcikk-áruház forgalmának negyedéves, szezonálisan kiigazított adatai és az előrejelzések átlagértékei (millió Ft-ban)

Év	*Negyedév*				*Éves*
	1.	*2.*	*3.*	*4.*	*átlag*
1970	3.322	3.175	3.144	3.167	3.202
1971	3.026	3.055	3.175	3.108	3.091
1972	3.709	4.212	4.599	4.435	4.239
1973	5.251	5.251	5.369	5.295	5.291
1974	5.133	5.013	4.984	4.746	4.969
1975	4.390	4.332	4.301	4.272	4.324
1976	4.450	4.568	5.013	4.999	4.757
1977	7.238	7.802	7.505	7.548	7.523
1978	6.793	6.646	6.691	6.860	6.817
1979	6.646	6.319	6.141	5.903	6.252
1980	5.518	5.340	5.311	5.191	5.340
1981	5.102	5.133	5.162	5.222	5.155
minta átl.	5.048	5.070	5.139	5.062	5.080
1982	5.458	6.675	6.793	6.675	6.400
1983	6.526	6.562	6.524	7.443	6.764
1984	7.778	8.339	8.445	9.280	8.460

2. táblázat: A prediktív eloszlás percentilisei 5000 szimulált lefutás alapján

Év	*Negyed-*	*Percentilisek*				
	év	*5*	*25*	*medián*	*75*	*95*
1982	1	4.82	5.07	5.29	5.42	5.73
1982	2	4.51	4.98	5.31	5.66	6.14
1982	3	4.26	4.86	5.38	5.80	6.51
1982	4	3.96	4.83	5.40	5.96	6.82
1983	1	3.74	4.76	5.42	6.13	7.14
1983	2	3.52	4.63	5.43	6.19	7.37
1983	3	3.36	4.61	5.44	6.24	7.52
1983	4	3.24	4.59	5.46	6.27	7.63
1984	1	3.19	4.57	5.48	6.32	7.74
1984	2	3.06	4.55	5.49	6.34	7.86
1984	3	3.04	4.54	5.49	6.34	7.86
1984	4	3.02	4.52	5.50	6.36	7.93

A másodrendű autoregresszív modell megfelelően írja le a forgalom alakulásának folyamatát az 1970–1981 közötti periódusban, mivel a minta autokorreláció függvénye konzisztens a másodrendű autoregresszív modellével. A feltételezett modell:

$$y_t = \Phi_0 + \Phi_1 y_{t-1} + \Phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t \qquad t = 1, 2, \ldots, 46 \tag{16}$$

ahol $\varepsilon_t \sim N(0, \tau^{-1})$ és függetlenek, a Φ_0, Φ_1, Φ_2 és τ paraméterek a

$$\Pi(\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \tau) \propto 1/\tau \qquad \tau > 0, \quad -\infty < \Phi_i < +\infty \quad (i = 1, 2, 3) \tag{17}$$

a priori eloszlást követik, az $y_{-1} = 3.332$ és $y_0 = 3.175$ adatok a számítás induló értékei.

A (7)–(11) egyenletek felhasználásával

$$(\tau|Y) \sim \Gamma(43/2, 2/14.1525) = \Gamma(21.5, 0.1413)$$

$$(\Phi|\tau, Y) \sim N(\hat{\Phi}, [\tau D]^{-1}) =$$

$$N\left(\begin{pmatrix} 0.554 \\ 1.151 \\ -0.323 \end{pmatrix}, \ \tau^{-1}\begin{pmatrix} 0.3702 & -0.0518 & -0.0164 \\ -0.0518 & 0.1263 & -0.1171 \\ -0.0164 & -0.1171 & 0.1212 \end{pmatrix}\right) \tag{18}$$

Különös figyelmet érdemel az 5 és 95 percentilisek alkotta intervallum, amelyet Bayes-féle prediktív intervallumnak neveznek. Tanulságos a Bayes-módszerrel és a hagyományos technikákkal adódó eredmények összehasonlítása. Az előrejelzések és azok határai általában különböznek a Box-Jenkins eljárással adódóaktól. Az előrejelzési intervallumok szélesebbek, sőt még csak nem is tartalmazzák teljes egészében a Box-Jenkins-féle intervallumokat. Ez azonban nem meglepő, hiszen a Bayes-módszerrel nyerhetőtől teljesen eltérő előrejelző függvényeken alapulnak. Egy Box-Jenkins modell által generált előrejelzés tendenciaszerűen torzított a mintaátlag felé, míg a prediktív eloszlás átlaga nem mutat ilyen viselkedést. Bár ezeket a tapasztalatokat egy nagyon egyszerű modellel kapcsolatban szereztük, a módszer jóval bonyolultabb modellek esetében is alkalmazható.

5. VÁLTOZÓ ELŐREJELZÉSEK

A kizárólag múltbeli adatokon alapuló előrejelzési módszerek feltételezik, hogy a sztochasztikus folyamat ugyanaz lesz a jövőben, mint amilyen a múltban volt. Az előző szakaszbeli prediktív eloszlást ilyen feltételek mellett szimuláltuk. Ebben a szakaszban feltételezzük, hogy a sztochasztikus folyamat a jövőben megváltozik. Feltételezzük, hogy a folyamatban 1982–1984 között változás következik be, és ennek a feltételezésnek megfelelő változó előrejelzést adunk. Erre a célra a

$$y_t - \mu = \Phi_1(y_{t-1} - \mu) + \Phi_2(y_{t-2} - \mu) + \varepsilon_t \tag{19}$$

másodrendű autoregresszív folyamat alkalmas, ahol μ az idősor átlagértékét jelöli. A (16) másodrendű autoregresszív modellel összevetve $\Phi_0 = (1 - \Phi_1 - \Phi_2)\mu$. A Φ vektor a posteriori eloszlását adott τ pontosság és $Y = (y_{-1}, y_0, \dots, y_T)$ adatok mellett a (18) egyenlet írja le.

Ha az idősor μ átlagértéke független a Φ_1 és Φ_2 paraméterektől, az átlagértéknek μ értékről $(\mu + \lambda)$ értékre változása a (18) eloszlást csak a $\hat{\Phi}_0$ átlagértéken keresztül befolyásolja.

Eredetileg a

$$\hat{\Phi}_0 = (1 - 1.151 + 0.323)\hat{\mu} \tag{20}$$

összefüggés állt fenn, így a konstans kiigazított várható értéke:

$$\hat{\Phi}_0 = 0.0554 + 0.172\lambda \tag{21}$$

Ez a szimulációs eljárást csak kissé módosítja. A $(0.554 + 0.172\lambda, 1.151, -0.323)$ kiigazított várható érték vektorhoz kell egy, az $N(0, [\tau D]^{-1})$ folyamatból származó eltérés vektort hozzáadni. Ennek a két vektornak az összege a Φ egy realizációja, amelyet a folyamat egy jövőbeli lefutásának generálására használhatunk. A lefutásokban bekövetkező, az új vektor által okozott változás a „beavatkozás" előjelétől és mértékétől függ. Ez a változó előrejelzések előállítására szolgáló eljárás BOX és TIAO (1975) módszerére emlékeztet, amelyben egy determinisztikus komponenst adnak hozzá egy idősormodellhez, így az képes áttérni egy új várható érték szintre egy meghatározott időpontban. Ezt az eljárást alkalmazhatjuk a jövő leírására különböző feltételezések mellett, így a „mi lenne, ha" elemzések hasznos eszköze lehet. A szimulált utak elemzésével előrejelezhetjük egy idősor fordulópontjait (lásd WECKER 1979). Lehetséges változó előrejelzések előállítása ennek a módszernek a segítségével informatív a priori eloszlást alkalmazva (17) helyett.

IRODALOM

1. BAILLIE, R. T. (1979) Asymptotic Prediction Mean Squared Error for Vector Autoregressive Models, Biometrika, 66, 675–679.

2. BLOOMFIELD, P. (1972) On the Error of Prediction of a Time Series, Biometrika, 59, 501–509.

3. BOX, G. E. P. and JENKINS, G. M. (1976) Time Series Analysis, Forecasting and Control, San Francisco: Holden-Day

4. BOX, G. E. P. and TIAO, G. C. (1975) Intervention Analysis with Applications to Economic and Enviromental Problems, Journal of the American Statistical Association, 70, 70–79.

5. CHOW, G. C. (1974) Multiperiod Predictions from Stochastic Difference Equations by Bayesian Methods, in: Studies in Bayesian Econometrics and Statistics, eds. Fienberg, S.E. and Zellner, A., Amsterdam: North-Holland, chap. 8.

6. HARRISON, P. J. and STEVENS, C. F. (1976) Bayesian Forecasting, Journal of the Royal Statistical Society. Ser.B, 38, 205–228.

7. MONAHAN, J. F. (1983) Fully Bayesian Analysis of ARMA Time Series Models, Journal of Econometrics, 21, 307–331.

8. PENTIKAINEN, T. and RANTALA, J. (1981) Evaluation of the Capacity of Risk Carriers by Means of Stochastic Dynamic Programming, ASTIN Bulletin, 12, 1–21.

9. PHILLIPS, P. C. B. (1979) The Sampling Distribution of Forecasts from a First-Order Autoregression, Journal of Econometrics, 9, 241–261.

10. VAN DIJK, H. K., KLOEK, T. and BOENDER, C. G. E. (1985) Posterior Moments Computed by Mixed Integration, Journal of Econometrics, 29, 3–18.

11. WECKER, W. (1979) Predicting the Turning Points of a Time Series, Journal of Business, 52, 35–50.

12. WEST, M., HARRISON, P. J. and MIGON, H. S. (1985) Dynamic Generalized Linear Models and Bayesian Forecasting, Journal of the American Statistical Association, 80, 73–83.

13. ZELLNER, A. (1971) An Introduction to Bayesian Inference in Econometrics, New York: John Wiley.

ABSTRACT

The autoregressive integrated moving average, ARIMA class of models provides a flexible set of parametric forms for modeling and forecasting from univariate time series models. From a Bayesian viewpoint, however, the Box-Jenkins method lacks an important facet – a provision for modeling uncertainty about parameter estimates. Here we present a technique for including this feature in both the estimation and forecasting stages.